UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA, UNIDAD AZCAPOTZALCO, DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

LABORATORIO DE MECANISMOS TRIMESTRE ________________

PRÁCTICA 10.

1. **NOMBRE Y CARRERA**: ____

2. **NOMBRE DE LA PRÁCTICA**: Hipocicloides.

3. **ARCHIVOS**:

- SISTEMA PLANETARIO.iam
- BANCADA.ipt
- ENGRANE SOL.ipt
- ENGRANE PLANETARIO.ipt
- ENGRANE ANILLO.ipt
- ARMADURA PLANETARIA.ipt
- Planetary gear system virtually simulated.doc

4. **DATOS:** Para el sistema PLANETARIO con ángulo de presión igual a 25 grados y paso diametral igual a 4 dientes por cada pulgada de diámetro de paso, el engrane sol tiene 36 dientes y el engrane planetario tiene 28 dientes. El ENGRANE SOL gira a 15 rad/s y la ARMADURA PLANETARIA gira a 6 rad/s. Ver Figuras 10a y 10b.

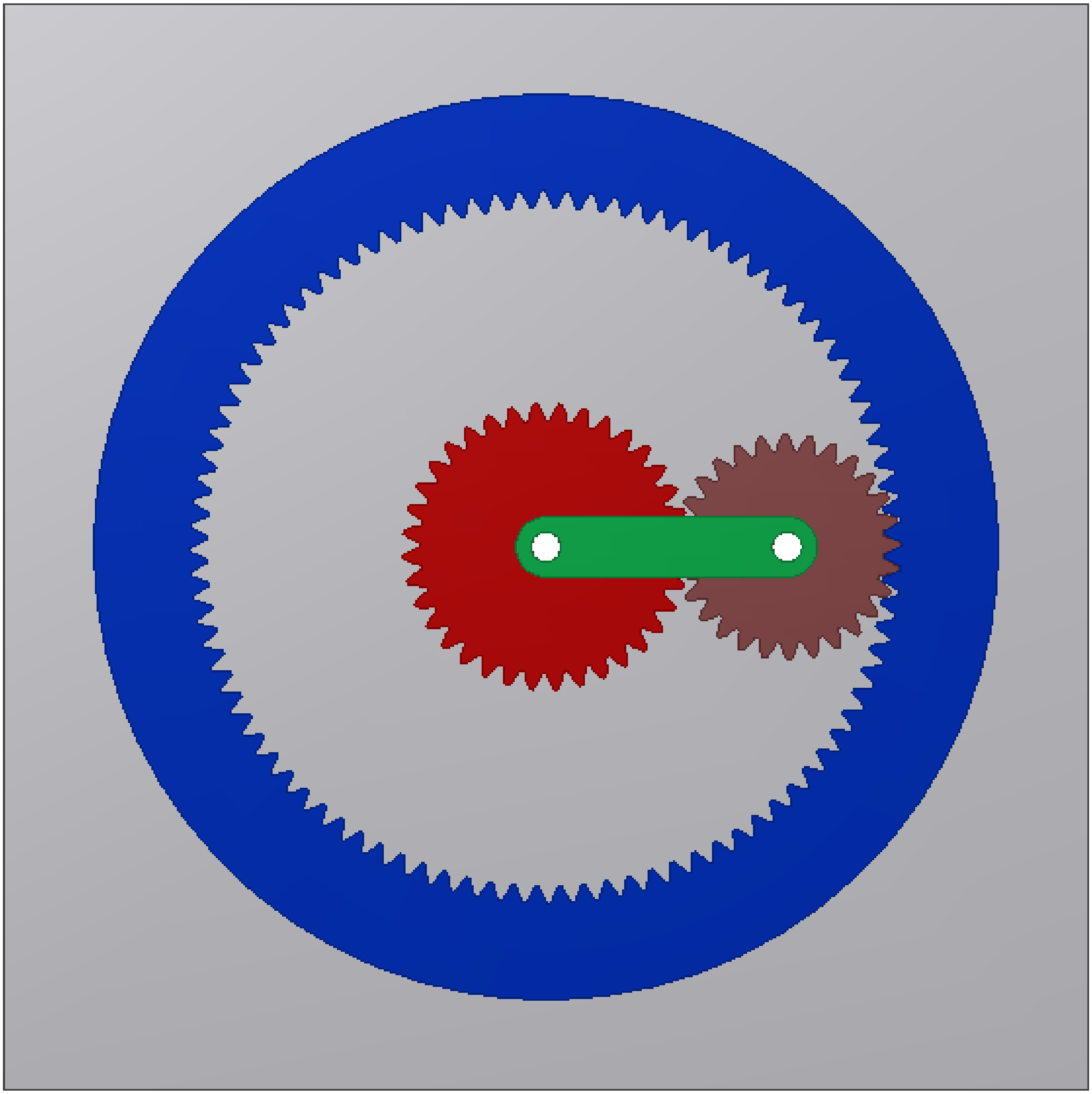


Figura 10a.- Sistema planetario. La bancada (0), eslabón fijo, en color gris; el engrane sol y la armadura planetaria (1) y (4), entradas del mecanismo, en color rojo y verde respectivamente; el engrane planetario (2), girando alrededor de su centro geométrico y alrededor del engrane sol, en color café.

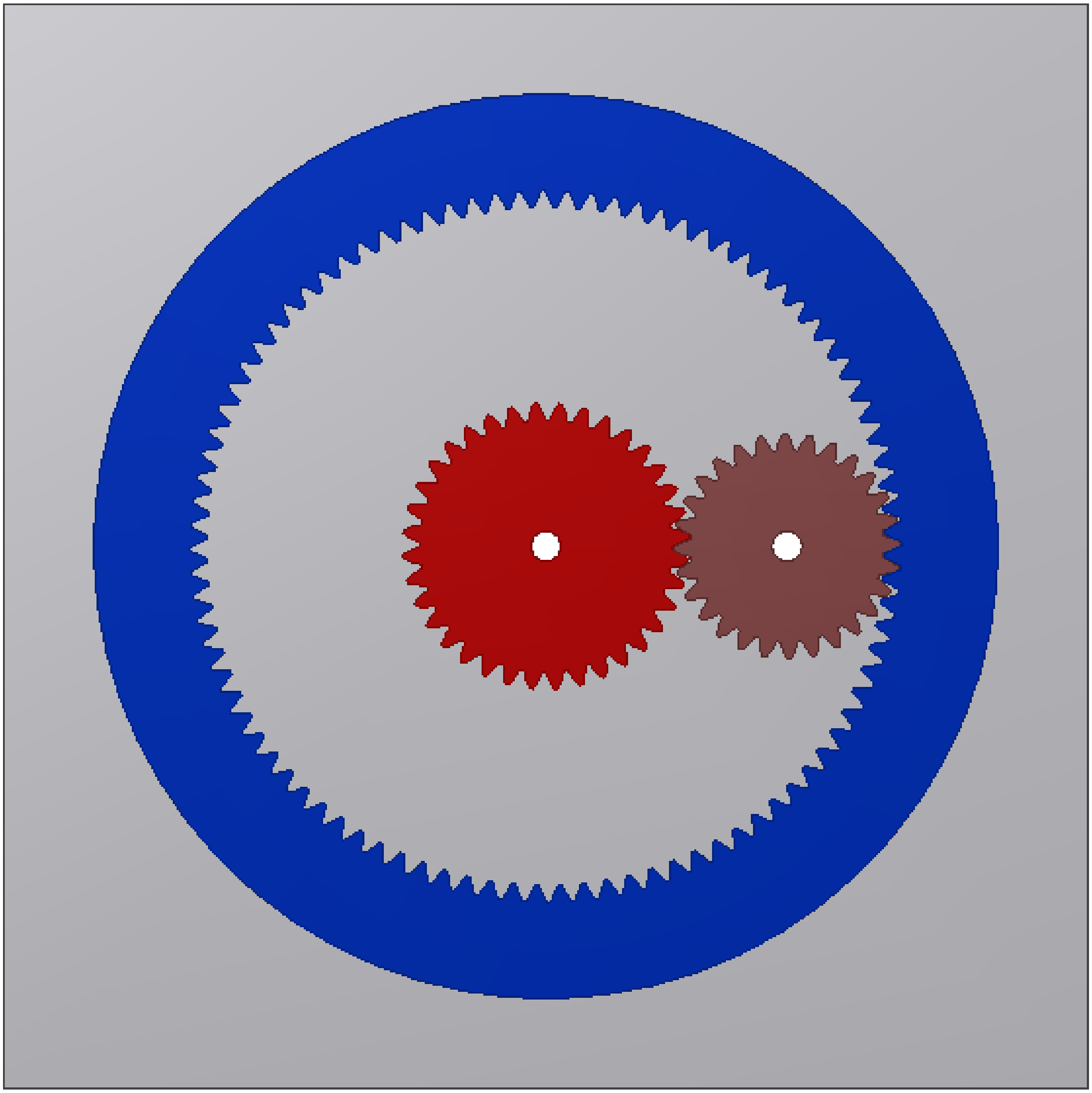


Figura 10b.- Sistema planetario sin armadura planetaria.

5. **INTRODUCCIÓN**.- En esta práctica se analizará:

- La hipocicloide generada con las dos entradas diferentes de cero.
- Los efectos sobre la hipocicloide cuando se cambian las entradas y/o se fija una de las dos.

6. **OBJETIVO**.- Al final de la práctica el alumno será capaz de: determinar los efectos sobre la hipocicloide cuando se cambian las entradas y/o se fija una de las dos.

7. **FUNDAMENTO**.-

Puesto que la presente práctica está basada en los mismos fundamentos que la anterior, en figuras y tablas se respetan las correspondientes numeraciones de la práctica anterior.

Engranajes.

Los engranes se estudian porque la transmisión del movimiento rotatorio de un eje a otro se presenta prácticamente en todas las máquinas imaginables. Los engranes constituyen uno de los mejores medios disponibles para transmitir este movimiento.

Terminología y definiciones.

Los *engranes rectos* sirven para transmitir movimiento rotatorio entre ejes, son cilíndricos con dientes paralelos a los ejes de rotación. La figura 9.1a muestra, para los dientes de engranes rectos, las definiciones siguientes:

Circunferencia de paso. Es la circunferencia teórica sobre la que se basan todos los cálculos. Las circunferencias de paso de un par de engranes acoplados son tangentes. Un arco de esta circunferencia se muestra en color cyan.

Paso circular p_c. Es la longitud del arco medida sobre la circunferencia de paso, que va desde un punto sobre uno de los dientes hasta el punto correspondiente sobre el diente adyacente. Es mostrado en color cyan.

Circunferencia de addendum. Es la circunferencia mayor en un engrane. Un arco de esta circunferencia se muestra en color rojo.

Cabeza o addendum a. Es la distancia radial entre la circunferencia de addendum y la circunferencia de paso.

Circunferencia de dedendum. Es la circunferencia menor en un engrane. Un arco de esta circunferencia se muestra, en color azul.

Raíz o dedendum b. Es la distancia radial entre la circunferencia de dedendum y la circunferencia de paso.

Altura total h. Es la suma de addendum y dedendum.

Circunferencia de holgura. Es tangente a la circunferencia de addendum del engrane acoplado. El dedendum en un engrane dado excede al addendum. Un arco de esta circunferencia se muestra, en color negro.

Holgura c. Es la distancia radial entre la circunferencia de holgura y la circunferencia de dedendum.

Ángulo subtendido por un diente (asd). Es el ángulo delimitado por dos de las líneas radiales azules que, iniciando en el centro del engrane, terminan en la intersección de la circunferencia de paso con uno y otro lado del mismo diente. La longitud del arco correspondiente define el espesor circular del diente sobre la circunferencia de paso.

Ángulo subtendido por un claro (asc). Es el ángulo delimitado por dos de las líneas radiales azules que, iniciando en el centro del engrane, terminan en la intersección de la circunferencia de paso con uno y otro lado del mismo claro. La longitud del arco correspondiente define el ancho circular del claro sobre la circunferencia de paso.

Radio del filete (r_f). Es el radio en el “pie” del diente.

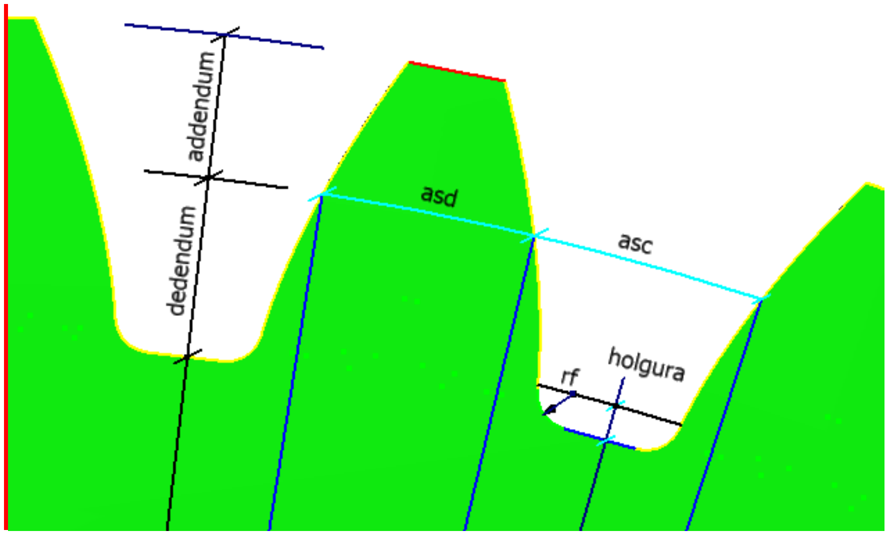


Figura 9.1a. Parámetros de dientes de engranes rectos.

La figura 9.1b muestra otros parámetros importantes en engranes rectos. La frontera entre cara y flanco es el cilindro de paso.

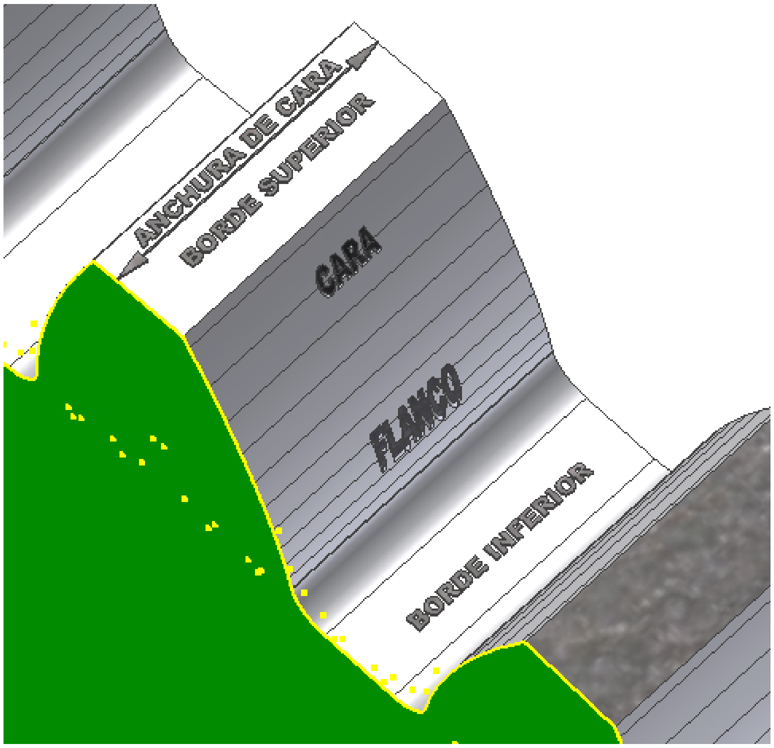


Figura 9.1b. Otros parámetros importantes en engranes rectos.

Otras definiciones se indican a continuación:

Piñón. Es el más pequeño de los dos engranes acoplados, al más grande se le denomina engrane.

Paso diametral P. Es el número de dientes en el engrane por pulgada de diámetro de paso. Sus unidades son $\frac{dientes}{pulgada}$. Es el índice del tamaño del diente en el Sistema Americano. Note que en realidad no se puede medir el paso diametral sobre el engrane propiamente dicho.

Módulo m. Es la razón del diámetro de paso al número de dientes. Sus unidades son $\frac{milímetros}{dientes}$. Es el índice del tamaño del diente en el Sistema Internacional.

En engranes rectos, es de gran utilidad la siguiente relación: $P = \frac{D}{d}$ (9.1)

En donde P es el paso diametral en $\frac{dientes}{pulgada}$, D es el número de dientes, d es el diámetro de la circunferencia de paso.

Ley fundamental del engranaje.

La acción de los dientes acoplados de los engranes, para transmitir movimiento rotatorio, puede compararse con una leva y su seguidor. Cuando a los perfiles de los dientes (o los de la leva y el seguidor), se les traza de forma tal que se produzca una relación constante entre las velocidades angulares, se dice que las superficies son *conjugadas*. Es posible especificar cualquier perfil para un diente y luego encontrar un perfil para el diente que se acoplará con él, de modo que las superficies sean conjugadas. Una de estas soluciones es el perfil de involuta que, con unas cuantas excepciones, se utiliza generalmente en los dientes de engranes.

La acción de un par de dientes acoplados conforme recorre toda una fase, debe ser tal, que la razón de la velocidad angular del engrane impulsor a la del engrane impulsado sea constante. Este es el criterio fundamental que rige la selección de los perfiles de dientes. Si esto no se cumpliera para el engranaje, se tendrían vibraciones muy serias y problemas de impacto, incluso a velocidades bajas.

Por el teorema de la razón de velocidades angulares.

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_{4/1}}{\boldsymbol{\omega}_{2/1}} = \frac{\boldsymbol{R}_{O_{24}O_{12}}}{\boldsymbol{R}_{O_{24}O_{14}}} \qquad (9.2)$$

En la figura 9.2 se observan dos perfiles que están en contacto en A; el perfil 2 es el impulsor y el 3 el impulsado. Una normal común a los perfiles en el punto de contacto interseca con la línea de los centros $O_{12}O_{13}$ en el centro instantáneo O_{23}.

En el engranaje, O_{23} recibe el nombre de *punto de paso* y BC es la *línea de acción*. Si los radios del punto de paso de los dos perfiles se designan como r_2 y r_3, por la ecuación 9.2.

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_2} \qquad (9.3)$$

La ecuación (9.3) se usa con mucha frecuencia para definir la *ley del engranaje*, la cual afirma que *el punto de paso se debe mantener fijo sobre la línea de los centros*. Esto significa que todas las líneas de acción de todo punto de contacto instantáneo deben contener al punto de paso. El problema consiste ahora en determinar la forma de las superficies acopladas para satisfacer la ley del engranaje.

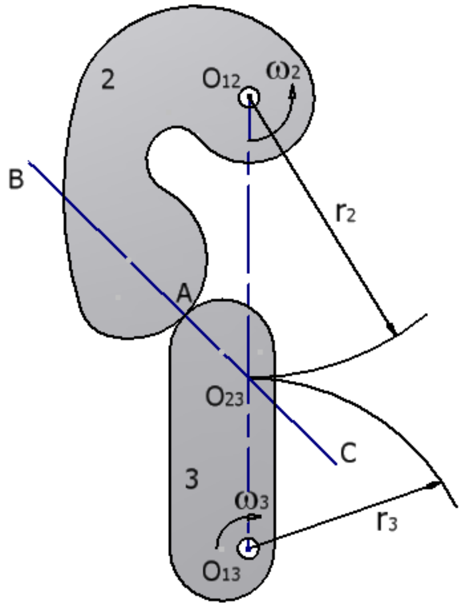


Figura 9.2. Perfiles en contacto.

Propiedades de la involuta.

Si los perfiles de dientes acoplados tienen la forma de curvas involuta, se satisface la condición de que la normal común en todos los puntos en contacto contiene al punto de paso. Una involuta es la trayectoria generada por un punto trazador en el extremo de una cuerda, conforme ésta se aleja de un *cilindro base*. Lo anterior se muestra en las figuras 9.3 y 9.3a, en donde T es el punto trazador. Note que la cuerda A_iT_i es tangente a la circunferencia correspondiente al cilindro base (en rojo) y normal a la involuta en T_i. La distancia A_iT_i es el valor instantáneo del radio de curvatura de la involuta. Conforme la involuta se genera desde el origen T_0 hasta T_n, el radio de curvatura varía continuamente; es cero en T_0 y tiene su mayor valor en T_n.

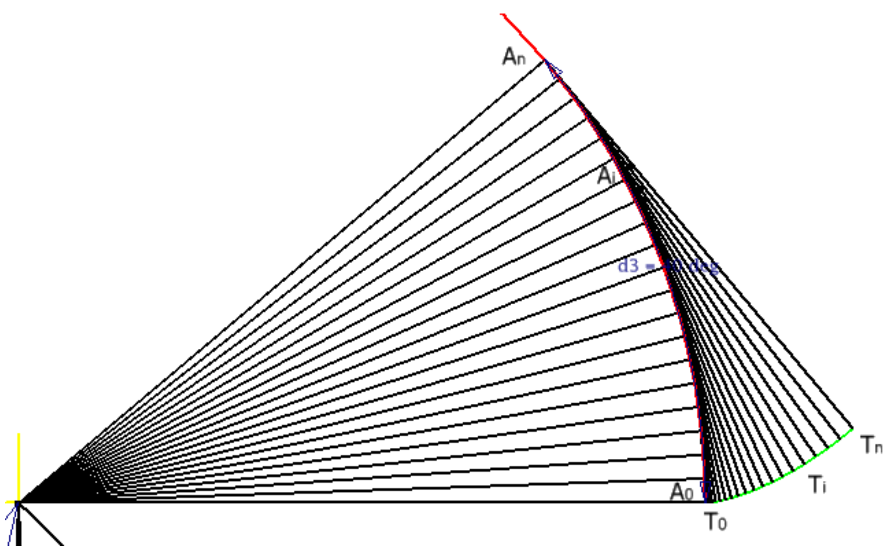


Figura 9.3. Involuta.

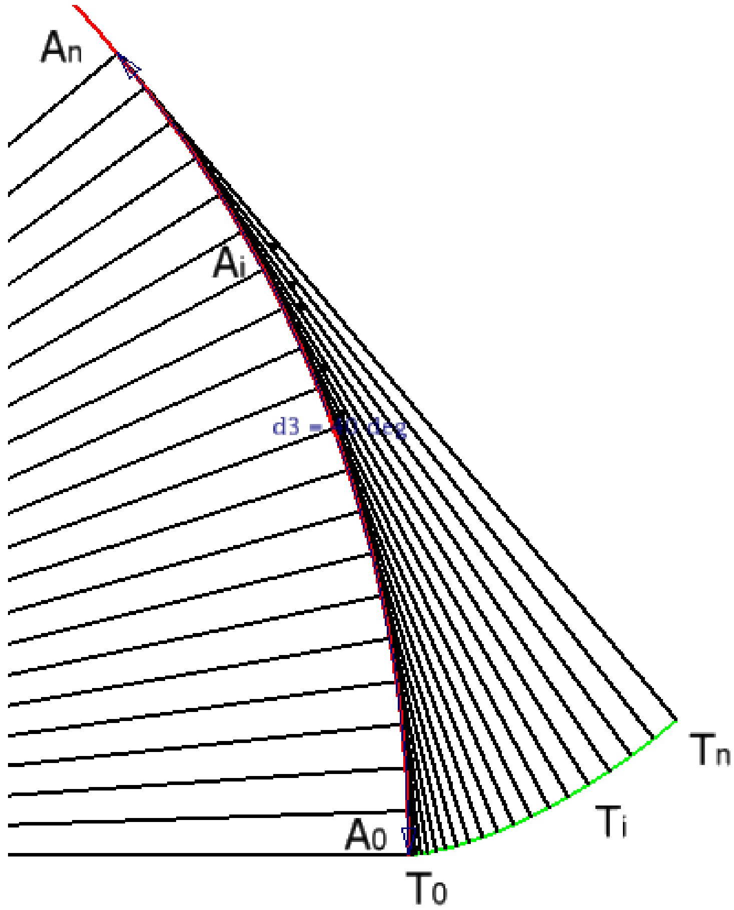


Figura 9.3a. Detalle de involuta.

Examinemos ahora el perfil de involuta para ver cómo satisface la necesidad de transmisión de movimiento uniforme. En la figura 9.4 se muestran dos dientes, con perfil de involuta, acoplados. Las circunferencia de los cilindros base tienen centro en O_{12} y en O_{13} con radios $O_{12}A$ y $O_{13}B$, respectivamente. Imaginemos ahora la rotación del engrane 2 en el sentido de las manecillas del reloj y la rotación del engrane 3 en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, de tal manera que la cuerda que contiene tanto al punto A como al punto B se mantenga tensa, un punto T trazará las involutas CD sobre el engrane 2 y EF sobre el engrane 3. Las involutas generadas simultáneamente por un solo punto trazador se consideran perfiles conjugados.

En la misma figura, los perfiles con forma de involuta se muestran como parte de dientes, de diferentes engranes, acoplados. La trayectoria de contacto será la recta AB. Dado que la recta AB es la generadora de cada involuta, es normal a los dos perfiles en todos los puntos de contacto. Adicionalmente, siempre ocupa la misma posición en virtud de que es tangente a los dos cilindros base. El punto P es el de paso; no se mueve; y por tanto, la curva involuta satisface la ley del engranaje.

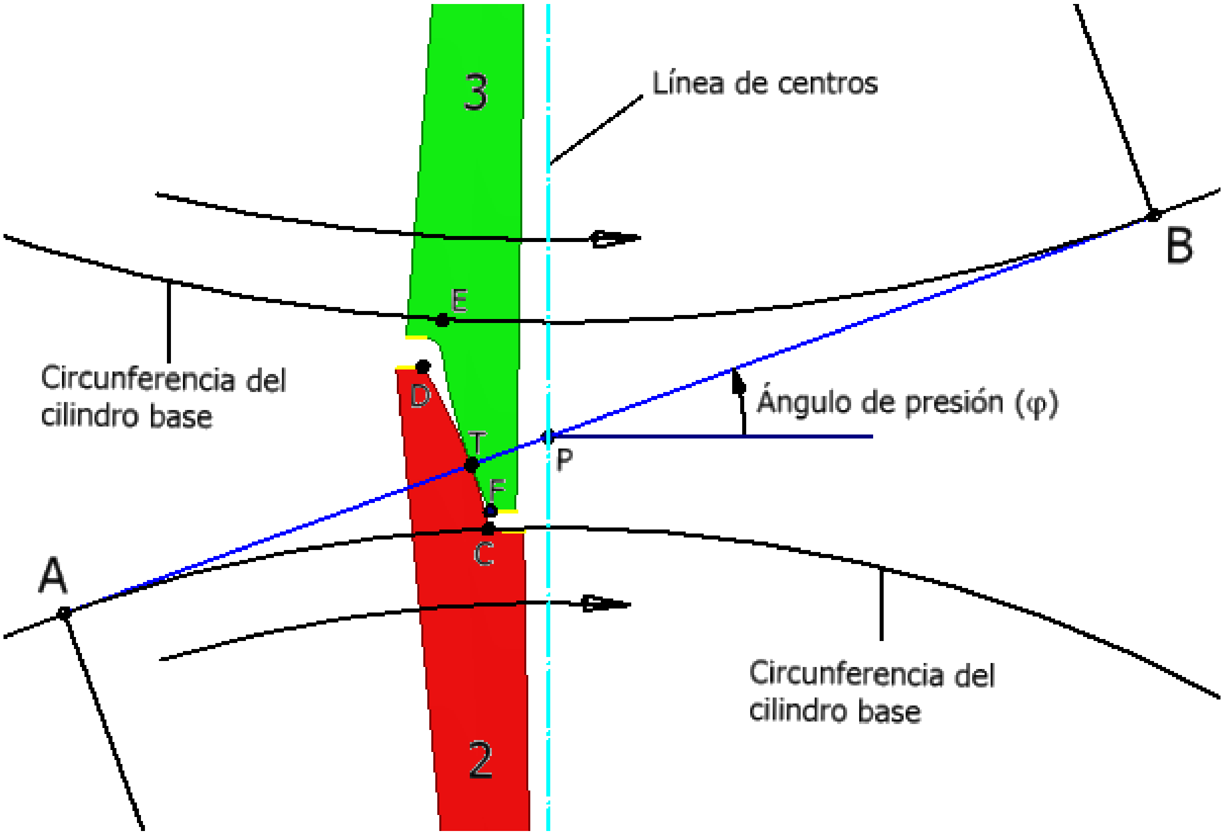


Figura 9.4. Dos dientes, con perfil de involuta, acoplados.

En el caso de los valores numéricos o paramétricos, el alumno deberá obtener la ventaja mecánica considerando a un par de engranes como un mecanismo de cuatro eslabones RRRR.

Engranes intercambiables.

Las relaciones entre addendum, dedendum, espesor del diente, ancho del claro y ángulo de presión para lograr la intercambiabilidad de los engranes de todos los números de dientes, pero del mismo paso diametral y ángulo de presión (ángulo entre la línea de acción y la perpendicular a la línea de centros).

En la tabla 9.1 se indican las proporciones de los dientes para engranes intercambiables para que operen a una distancia estándar entre centros.

Tabla 9.1.- Sistema de dientes norma AGMA y ANSI, para engranes rectos.

Parámetro	Paso grueso*		Paso fino
Ángulo de presión φ	20^0	25^0	20^0
Addendum a	$\frac{1}{P}$	$\frac{1}{P}$	$\frac{1}{P}$
Dedendum b	$\frac{1.25}{P}$	$\frac{1.25}{P}$	$\frac{1.2}{P} + 0.002\, pulg$
Altura de trabajo h_t	$\frac{2}{P}$	$\frac{2}{P}$	$\frac{2}{P}$
Altura total h	$\frac{2.25}{P}$	$\frac{2.25}{P}$	$\frac{2.2}{P} + 0.002\, pulg$
Espesor circular del diente t	$\frac{\pi}{2P}$	$\frac{\pi}{2P}$	$\frac{\pi}{2P}$
Radio del filete r_f	c	c	No estandarizado
Holgura c**	$\frac{0.25}{P}$	$\frac{0.25}{P}$	$\frac{0.2}{P} + 0.002\, pulg$
Holgura c ***	$\frac{0.35}{P}$	$\frac{0.35}{P}$	$\frac{0.35}{P} + 0.002\, pulg$
Número mínimo de dientes en el piñón	18	12	18
Número mínimo de dientes por par	36	24	
Anchura mínima de cara del borde superior	$\frac{0.25}{P}$	$\frac{0.25}{P}$	No estandarizado

*Paso diametral menor a 20 altura completa

**Mínima

***Dientes cepillados o rectificados

Pasos diametrales de uso general:

Paso grueso.- 2, 2.25, 2.5, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 16.

Paso fino.- 20, 24, 32, 40, 48, 64, 80, 96, 120, 150, 200.

Fundamentos de la acción de los dientes de engranes.

Para ilustrar los fundamentos de los engranes rectos, procederemos paso a paso, por el trazado real de un par de engranes rectos. Las dimensiones se tomarán de la tabla 9.1, introduciremos nuevos términos conforme se avance en el trazado.

Seleccionaremos un piñón con los siguientes datos:

Diámetro de la circunferencia de paso (d) =	20	pulgadas
Paso diametral (P) =	2	dientes cada pulgada de diámetro de paso
Ángulo de presión (φ) =	20	grados

Y un engrane con los datos siguientes:

Diámetro de la circunferencia de paso (d) =	25	pulgadas
Paso diametral (P) =	2	dientes cada pulgada de diámetro de paso
Ángulo de presión (φ) =	20	grados

Paso 1. Calcule los parámetros dependientes tanto para el piñón como para el engrane.

Para el piñón:

Espesor del diente (t) =	0.7853981633974480	pulgadas	$\frac{\pi}{2P}$
Radio de la circunferencia de paso (r)=	10.0000000000000000	pulgadas	$\frac{d}{2}$
Ángulo de presión en radianes (φ) =	0.3490658503988660	radianes	
Coseno del ángulo de presión =	0.9396926207859080		
Radio de la circunferencia base (r_b)=	9.3969262078590900	pulgadas	$rcos\varphi$
Diámetro de la circunferencia base (d_b) =	18.7938524157182000	pulgadas	$2r_b$
Radio de la circunferencia de addendum (r_a)=	10.5000000000000000	pulgadas	$r+\frac{1}{P}$
Diámetro de la circunferencia de addendum (d_a) =	21.0000000000000000	pulgadas	$2r_a$
Radio de la circunferencia de dedendum (r_d) =	9.3750000000000000	pulgadas	$r-\frac{1.25}{P}$
Diámetro de la circunferencia de dedendum (d_d) =	18.7500000000000000	Pulgadas	$2r_d$
Radio de la circunferencia de holgura (r_h) =	9.5000000000000000	pulgadas	$r_d+\frac{0.25}{P}$
Diámetro de la circunferencia de holgura (d_h) =	19.0000000000000000	pulgadas	$2r_h$
Número de dientes (D) =	40.0000000000000000	dientes	$d(P)$
Áng. subtendido por medio diente sobre la circ. de paso (asmd)=	2.1500000000000000	grados	$\frac{360}{4D}-\frac{0.2}{P}=\frac{\alpha}{2}$
Áng. subtendido por medio claro sobre la circ. de paso (asmc)=	2.3500000000000000	grados	$\frac{360}{4D}+\frac{0.2}{P}=\frac{\beta}{2}$
Ángulo de discretización para involuta (adi) =	2.0000000000000000	grados	
Ángulo de discretización para involuta (adi) =	0.0349065850398866	radianes	
Longitud de la primer tangente para involuta (L) =	0.3280146037881720	pulgadas	$r_b(adi)$
Radio del filete en el "pie" del diente (r_f) =	0.1250000000000000	pulgadas	r_h-r_d

Empleamos las mismas fórmulas, para el engrane:

Espesor del diente (t) =	0.7853981633974480	pulgadas	$\frac{\pi}{2P}$
Radio de la circunferencia de paso (r)=	12.5000000000000000	pulgadas	$\frac{d}{2}$
Ángulo de presión en radianes (φ) =	0.3490658503988660	radianes	
Coseno del ángulo de presión =	0.9396926207859080		
Radio de la circunferencia base (r_b)=	11.7461577598239000	pulgadas	$rcos\varphi$
Diámetro de la circunferencia base (d_b) =	23.4923155196477000	pulgadas	$2r_b$
Radio de la circunferencia de addendum (r_a)=	13.0000000000000000	pulgadas	$r+\frac{1}{P}$
Diámetro de la circunferencia de addendum (d_a) =	26.0000000000000000	pulgadas	$2r_a$
Radio de la circunferencia de dedendum (r_d) =	11.8750000000000000	pulgadas	$r-\frac{1.25}{P}$
Diámetro de la circunferencia de dedendum (d_d) =	23.7500000000000000	pulgadas	$2r_d$

Radio de la circunferencia de holgura (r_h) =	12.0000000000000000	pulgadas	$r_d + \frac{0.25}{P}$
Diámetro de la circunferencia de holgura (d_h) =	24.0000000000000000	pulgadas	$2r_h$
Número de dientes (D) =	50.0000000000000000	dientes	$d(P)$
Áng. subtendido por medio diente sobre la circ. de paso (asmd)=	1.7000000000000000	grados	$\frac{360}{4D} - \frac{0.2}{P} = \frac{\alpha}{2}$
Áng. subtendido por medio claro sobre la circ. de paso (asmc)=	1.9000000000000000	grados	$\frac{360}{4D} + \frac{0.2}{P} = \frac{\beta}{2}$
Ángulo de discretización para involuta (adi) =	2.0000000000000000	grados	
Ángulo de discretización para involuta (adi) =	0.0349065850398866	radianes	
Longitud de la primer tangente para involuta (L) =	0.4100182547352150	pulgadas	$r_b(adi)$
Radio del filete en el "pie" del diente (r_f) =	0.1250000000000000	pulgadas	$r_h - r_d$

Paso 2. Puesto que el procedimiento para trazar tanto el piñón como el engrane es el mismo, explicaremos sólo el procedimiento para el piñón. Trace: un arco (verde) con radio r_b (figura 9.5), un radio (de preferencia el horizontal); el arco y el radio deben tener centro en el origen de coordenadas. Con el radio anterior, haga un arreglo polar con centro en *el centro del piñón* y con 21 repeticiones a lo largo de 40 grados (para obtener líneas radiales cada dos grados, esto es el ángulo de discretización de la involuta). Trace una línea perpendicular por cada una de las líneas radiales (en su extremo), con una longitud igual a iL donde i varía desde 1 hasta 20 y L es igual a 0.3280146037881730 (recuerde que L es la longitud de la primer tangente para involuta). Note que las líneas necesariamente son tangentes al arco con radio r_b. Una curva suave que une los extremos de las líneas perpendiculares a las radiales será la involuta (amarilla). Trace una línea (roja) de longitud igual a r, desde el centro del arco hasta la involuta; se usará para repetir, por simetría, solo la involuta en una zona libre de trazos. La figura 9.5a muestra un detalle de la figura 9.5.

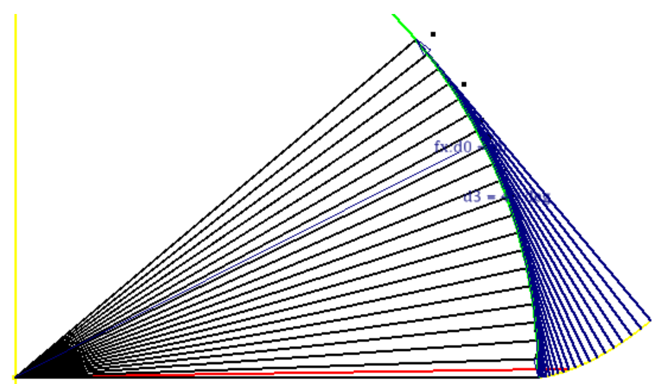


Figura 9.5. Trazo de involuta en el piñón.

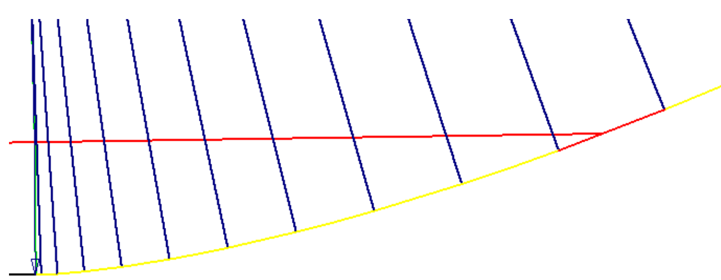


Figura 9.5a. Detalle de la figura 6.5.1.

Paso 3. Medir el ángulo entre la línea radial roja, mencionada en el paso anterior y el eje y negativo (90.8551025888). Trace la bisectriz correspondiente a este ángulo, use la bisectriz como línea de simetría, reproduzca la involuta con el eje y negativo dividiendo al medio claro del medio diente. Trace dos líneas radiales; una con longitud igual al radio de dedendum (9.375) y otra con longitud igual al radio de addendum (10.5). Respecto al eje y negativo, las líneas radiales anteriores deberán formar ángulos iguales al ángulo subtendido por medio claro (2.35) y al ángulo subtendido por medio diente (2.15), respectivamente. Trazar los arcos correspondientes al dedendum y al addendum para dar forma al medio claro y al medio diente (figura 9.6).

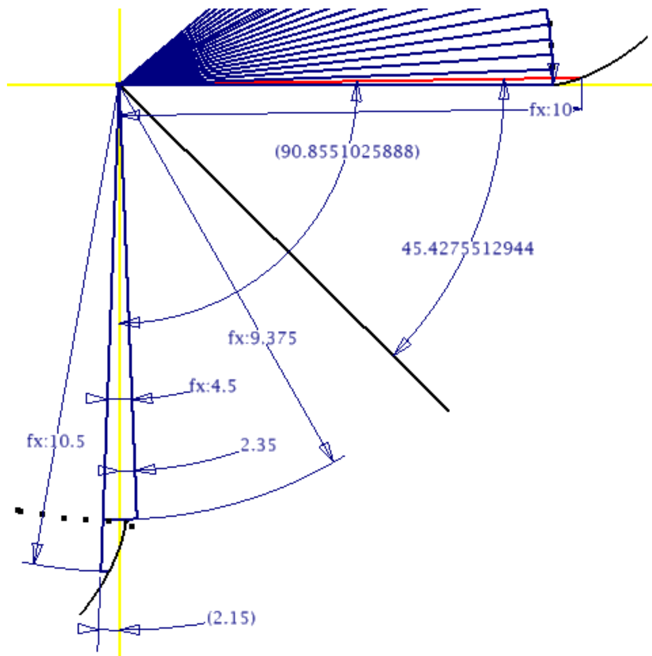


Figura 9.6. Medio diente y medio claro.

Paso 4. Trace para el filete que reducirá la concentración de esfuerzos, un arco con radio igual a la holgura (c) tangente a la involuta y al arco correspondiente a la circunferencia de dedendum (figura 9.7). Asegúrese que el medio diente y el medio claro constituyen un circuito geométricamente cerrado. También deberá ser un circuito geométricamente cerrado, el limitado por las dos líneas radiales y el arco correspondiente a la circunferencia de dedendum.

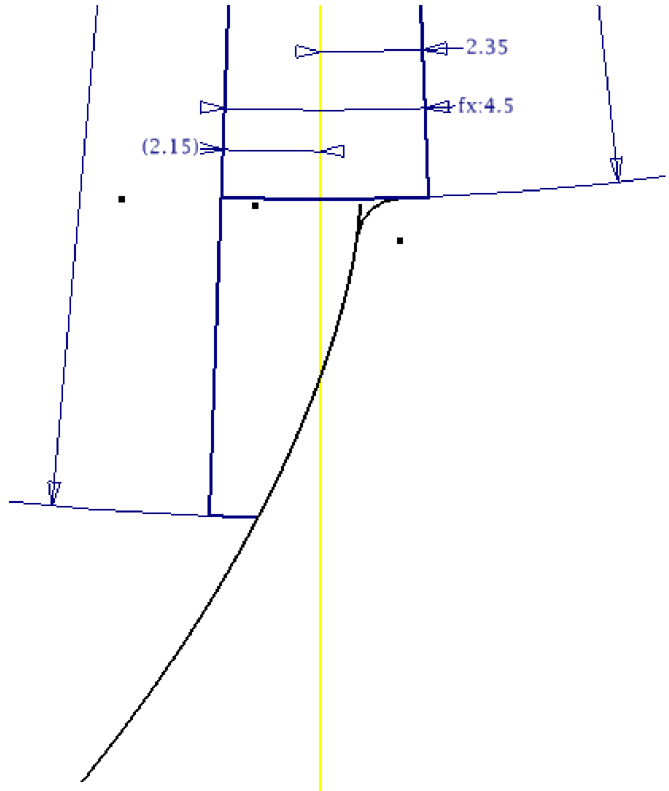


Figura 9.7. Radio de filete.

Paso 5. Genere la extrusión mostrada en la figura 9.8. Por simetría, obtenga la otra mitad del diente y el otro medio claro, como se muestra en la figura 9.9.

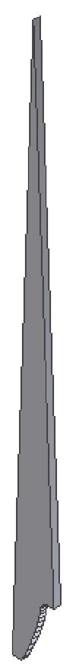


Figura 9.8. Extrusión.

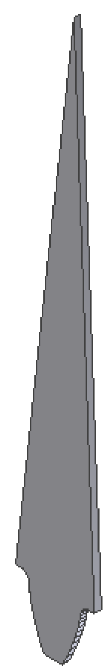


Figura 9.9. Simetría de 6.5.4.

Paso 6. Haga el arreglo polar de la extrusión y de la simetría, alrededor del centro del engrane, con 40 repeticiones a lo largo de los 360 grados (figura 9.10).

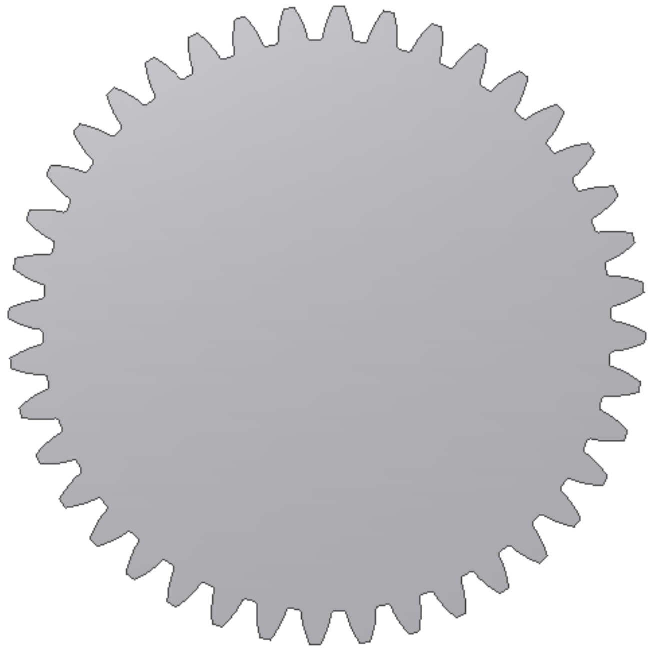


Figura 9.10. Arreglo polar.

Paso 7. Es momento de ocuparnos del ensamble del piñón y del engrane (figura 9.11). Genere la base constituida por un cuadrado de 60 por 60 pulgadas extruido una pulgada; el centro del cuadrado debe coincidir con el origen de coordenadas; los centros de barreno deberán estar sobre el eje y, separados 22.5 pulgadas (suma de los radios de las circunferencias de paso de piñón y engrane). Instale la base y el piñón, en ese orden. Restrinja el piñón respecto a la base: haga coincidentes el eje del barreno en el piñón con el eje superior del barreno en la base; una cara del piñón deberá contactar con la cara de la base; el plano xz del piñón y el plano xz de la base deberán formar un ángulo de cero grados. Ahora podrá manejar la restricción angular para hacer girar el piñón respecto a la base.

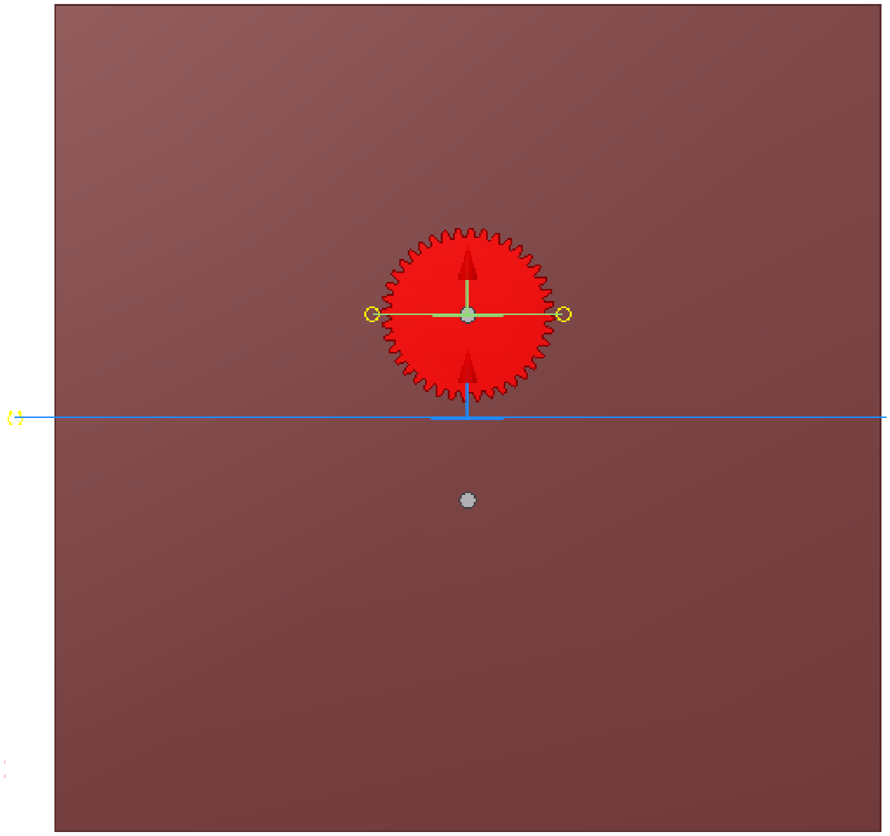
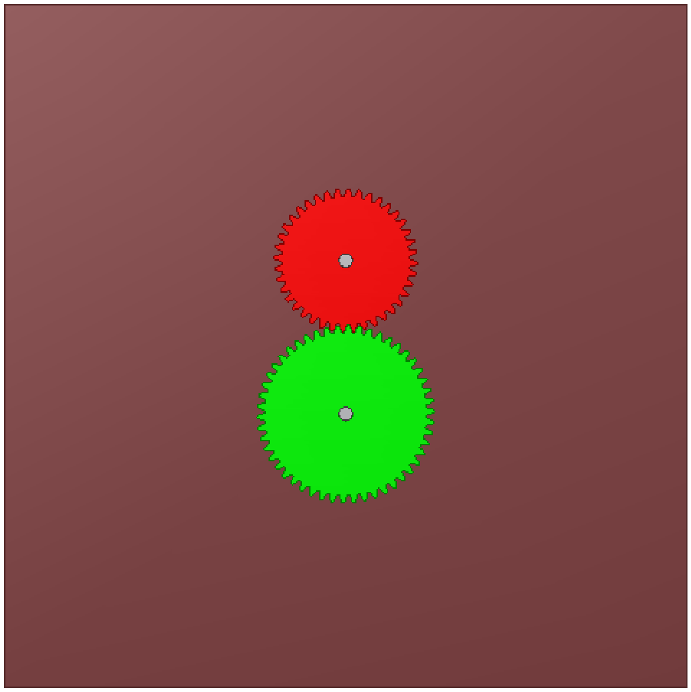


Figura 9.11. Base y piñón.

Paso 8. Instale el engrane (figura 9.12). Haga coincidentes el eje del barreno en el engrane con el eje del barreno inferior en la base; una cara del engrane deberá contactar con la cara de la base. El piñón y el engrane deberán estar correctamente ensamblados como se muestra en la figura 9.12, un detalle se muestra en la figura 9.12a. En restricciones (Constrain) seleccionar las opciones *Motion, Rotation, Reverse* para hacer que gire el engrane, con una relación de velocidades angulares igual a 0.8 cuando gire el piñón. Ahora se puede simular el movimiento del sistema.



9.12. Base, piñón y engrane.

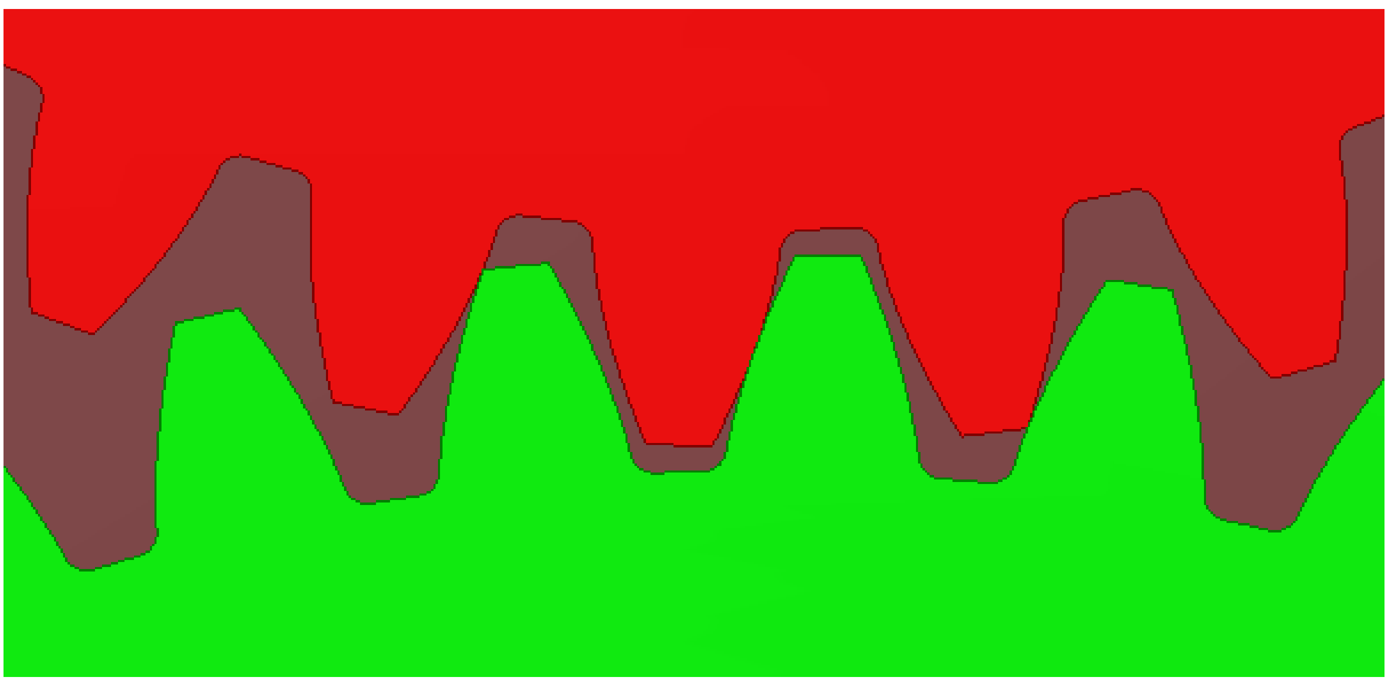


Figura 9.12a. Detalle de la figura 9.12.

El alumno debe hacer simulaciones para aumentar la extensión y profundidad de su conocimiento sobre el comportamiento cinemático del sistema.

Leer el archivo Planetary gear system virtually simulated.doc.

8. **PROCEDIMIENTO**:

- Con la información contenida en el archivo Planetary gear System virtually simulated.doc calcular las coordenadas (x, y) de la hipocicloide descrita por un punto material sobre la circunferencia de paso del engrane planetario, importarlas al archivo, de la práctica 9, SISTEMA PLANETARIO.iam, simular el sistema para comprobar la trayectoria sobre la curva hipocicloide. Salvar el archivo de ensamble con dos nombres diferentes para ser usados en los pasos siguientes.
- Con la ARMADURA PLANETARIA FIJA y el ENGRANE SOL girando a 15 rad/s: calcular las velocidades angulares de ENGRANE ANILLO y ENGRANE PLANETARIO, determinar las coordenadas (x, y) de la hipocicloide, importarlas a un nuevo archivo de ensamble, simular el sistema para comprobar la trayectoria sobre la curva hipocicloide.
- Con el ENGRANE ANILLO fijo y el ENGRANE SOL girando a 15 rad/s: calcular las velocidades angulares de ARMADURA PLANETARIA y ENGRANE PLANETARIO, determinar las coordenadas (x, y) de la hipocicloide, importarlas a un nuevo archivo de ensamble, simular el sistema para comprobar la trayectoria sobre la curva hipocicloide.

9. **RESULTADOS**:

10. **CONCLUSIONES**:

11. **CUESTIONARIO**:

- ¿Cuáles serán las hipocicloides generadas si fijamos la armadura planetaria?

12. **REFERENCIAS**:

13. **PONDERACIÓN**:

Sobre una escala de 100; el cálculo de cada velocidad angular incógnita corresponderá a 5 puntos (20), la determinación de las coordenadas (x, y) de cada una de las tres hipocicloides corresponderá a 10 puntos (30), cada animación corresponderá a 10 puntos (30); la respuesta al cuestionario corresponderá a 20 puntos.